

SMA

Le problème du multiplicateur pour le disque.

Thierry FAVRE

Ecublens, le 10 décembre 2009

Table des matières

1	Introduction	4
2	Rappels	5
3	Construction de $E(\varepsilon, k)$	7
3.1	Etape 1	7
3.2	Etape 2	10
4	Un résultat de Fefferman	13
4.1	Construction	13
4.2	Lemmes techniques	14
4.3	Un résultat de Feffermann	16
5	Analyse de Fourier et Multiplicateurs de L^p	23
5.1	Rappels	23
5.2	Définitions et notations	24
5.3	Transformée de Hilbert	25
5.4	Lemmes	26
6	Le théorème de Fefferman	32

Résumé

Fefferman a prouvé, ce qui lui a valu la médaille Fields, que la fonction caractéristique du disque unité de \mathbb{R}^2 n'est pas un multiplicateur de L^p pour $p \neq 2$. Nous allons présenter ce théorème. Pour ce faire, nous allons devoir prouver quelques résultats intermédiaires, dont certains, en géométrie, n'ont pas beaucoup de rapport avec le problème de base.

1 Introduction

Nous allons donner une preuve détaillée du théorème de Fefferman en analyse de Fourier. La première partie sera géométrique ; nous commencerons par construire ce que nous appellerons plus tard la figure germée d'un triangle et grâce à cette construction, nous prouverons un résultat de Fefferman. Puis nous aborderons une partie plus analytique où, après avoir défini ce qu'est un multiplicateur, nous montrerons finalement que la fonction caractéristique du disque unité de \mathbb{R}^2 n'en est pas un.

2 Rappels

Notation 2.1

Nous notons les nombres naturels $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

Soit un triangle ABC . Notons α l'angle $\angle BAC$, β l'angle $\angle ABC$ et γ l'angle $\angle ACB$.

Rappel 2.2 (Loi des sinus)

La loi des sinus est l'équation suivante :

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}.$$

Rappel 2.3 (Loi des cosinus)

Par la loi des cosinus, nous avons que

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \gamma.$$

Rappel 2.4 (Théorème de Thalès)

Soient un triangle ABC et deux points D et E sur les droites \overline{AB} , respectivement \overline{AC} tel que la droite \overline{DE} soit parallèle à la droite \overline{BC} . Alors on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Notation 2.5

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , nous utiliserons la notation $|E|$ pour noter l'aire de E .

Remarque 2.6

Si E est une union finie de triangles ou de rectangles, alors $|E|$ est aussi la mesure de Lebesgue de E .

Proposition 2.7 (Inégalité de Jordan)

Soit $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, alors

$$\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}.$$

Démonstration. Si $x = 0$, l'inégalité est triviale. Soit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Alors :

$$\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)' = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)(x - \tan(x))}{x^2} < 0,$$

car $\cos(x) \geq 0$, $x^2 > 0$ et $\tan(x) > x$. Ce qui implique que $\frac{\sin(x)}{x}$ est monotone décroissante. Nous avons donc :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} < \frac{\sin(x)}{x},$$

ce qui termine la preuve. □

3 Construction de $E(\varepsilon, k)$

Dans cette section, nous allons construire l'ensemble $E(\varepsilon, k)$ que nous utiliserons par la suite dans la preuve du lemme de Fefferman.

3.1 Etape 1

Soit ABC un triangle de \mathbb{R}^2 de base $b = AB$ et de hauteur h_0 , notons M le point milieu de AB . Nous allons construire deux autres triangles AMF et BME à partir de ABC comme suit.

Fixons $h_1 > h_0$. Etendons maintenant les cotés AC et BC dans la direction qui s'éloigne de la base. Alors E est l'unique point sur la droite qui passe par BC et de hauteur h_1 , par rapport à la base MB . De même pour F qui est l'unique point sur la droite qui passe par AC et de hauteur h_1 , par rapport à la base AM . Les triangles AMF et BME sont donc uniquement définis, de base AM , respectivement MB , et de hauteur h_1 , voir figure 1.

- Définition 3.1** (Figure germée) 1. Les triangles AMF et BME définis ci-dessus sont appelé les germes du triangle ABC .
2. L'union des germes est appelée la figure germée obtenue à partir de ABC et elle est notée $\text{Spr}(ABC)$.
3. On appelle la différence $\text{Spr}(ABC) \setminus ABC$, les bras de la figure germée.

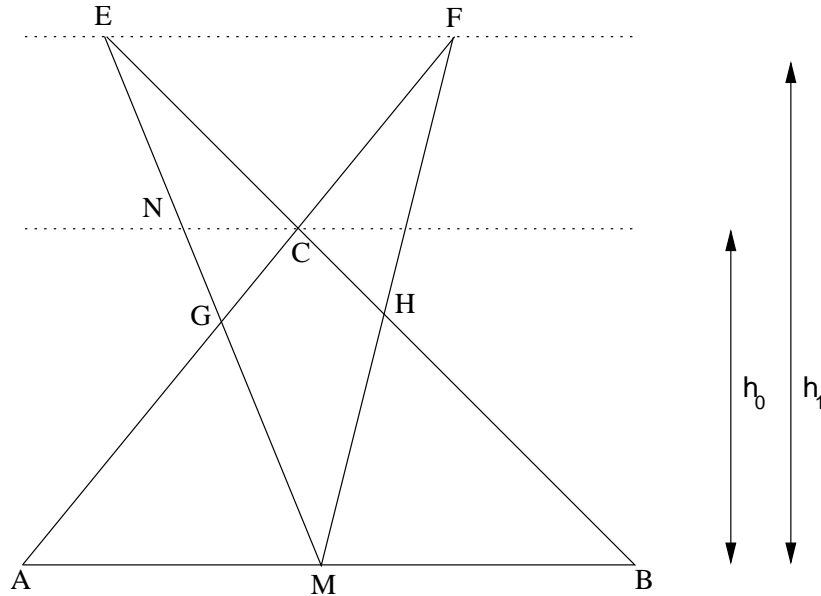


FIG. 1 – La figure germée de ABC

Proposition 3.2

La figure germée $Spr(ABC)$ a deux bras d'aire égale, noté EGC et FCH où G est l'intersection des droites \overline{AC} et \overline{EM} et H est l'intersection des droites \overline{BC} et \overline{FM} . De plus nous connaissons exactement leurs aires. En effet,

$$|EGC| = |FCH| = \frac{b \cdot (h_1 - h_0)^2}{2(2h_1 - h_0)},$$

où $b = AB$.

Démonstration. Nous allons montrer que $|EGC| = \frac{b \cdot (h_1 - h_0)^2}{2(2h_1 - h_0)}$.

La preuve pour le triangle FCH est exactement la même. Notons N l'intersection entre la droite \overline{ME} et la droite parallèle à AB passant par C . L'aire de EGC est alors l'aire de NGC plus l'aire de ENC . De plus, nous avons les relations suivantes :

1. $|ENC| = \frac{NC \cdot (h_1 - h_0)}{2}$;
2. $|NGC| = \frac{NC \cdot h}{2}$, où h est la hauteur du triangle NGC par rapport à la base NC .

On veut maintenant exprimer h et NC par rapport à b , h_0 et h_1 . Comme les triangles AMG et NGC sont semblables on a, par le théorème de Thalès,

$$\frac{NC}{b/2} = \frac{h}{h_0 - h}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} NC \cdot (h_0 - h) &= b/2 \cdot h \\ \Rightarrow NC \cdot h_0 - NC \cdot h &= b/2 \cdot h \\ \Rightarrow NC \cdot h_0 &= h(b/2 + NC), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$\frac{h}{h_0} = \frac{NC}{NC + b/2}. \quad (1)$$

De plus, les triangles ENC et BME sont aussi semblables on a, grâce au théorème de Thalès, que

$$\frac{NC}{b/2} = \frac{h_1 - h_0}{h_1}. \quad (2)$$

On a donc que l'aire de EGC est

$$\begin{aligned}
|ENC| + |NGC| &= \frac{NC \cdot (h_1 - h_0)}{2} + \frac{NC \cdot h}{2} \\
&= \frac{NC}{2} \cdot (h_1 - h_0 + h) \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{NC}{2} \cdot \left[(h_1 - h_0) + \frac{NC \cdot h_0}{NC + b/2} \right] \\
&= \frac{NC}{2(NC + b/2)} \cdot [(h_1 - h_0)(NC + b/2) + NC \cdot h_0] \\
&= \frac{NC}{2(NC + b/2)} \cdot [h_1 \cdot NC - h_0 \cdot NC + \\
&\quad + h_1 \cdot b/2 - h_0 \cdot b/2 + NC \cdot h_0] \\
&= \frac{NC}{2(NC + b/2)} \cdot [h_1(NC + b/2) - h_0 \cdot b/2] \\
&= \frac{NC}{2} \left(h_1 - \frac{h_0 \cdot b/2}{NC + b/2} \right).
\end{aligned}$$

En remplaçant NC par l'expression trouvée dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
|ENC| &= \frac{b/2 \cdot (h_1 - h_0)}{2h_1} \left[h_1 - \frac{b/2 \cdot h_0}{b/2 + \frac{b/2(h_1 - h_0)}{h_1}} \right] \\
&= \frac{b/2 \cdot (h_1 - h_0)}{2h_1} \left[h_1 - \frac{h_0 \cdot h_1}{2h_1 - h_0} \right] \\
&= \frac{b/2 \cdot (h_1 - h_0)}{2} \left[1 - \frac{h_0}{2h_1 - h_0} \right] \\
&= \frac{b/2 \cdot (h_1 - h_0)}{2} \left[\frac{2h_1 - h_0 - h_0}{2h_1 - h_0} \right] \\
&= \frac{b/2 \cdot (h_1 - h_0)^2}{2h_1 - h_0}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Etape 2

Soient $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Prenons maintenant un triangle $\Lambda = ABC$ de \mathbb{R}^2 isocèle en C , avec une base AB de longueur $b_0 = \varepsilon$ et de hauteur $MC = h_0 = \varepsilon$ où M le point milieu de AB . Définissons maintenant h_i par

$$h_i = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{j},$$

pour $i \in \{1, \dots, k\}$. Appliquons maintenant la procédure de l'étape précédente avec une hauteur h_1 au triangle Λ pour obtenir deux germes $\Lambda_1 = AMF$ et $\Lambda_2 = EMB$ comme sur la figure 1, leur hauteur est donc h_1 et la longueur de leur base est $b_0/2$. Appliquons de nouveau cette procédure avec une hauteur h_2 aux triangles Λ_1 et Λ_2 , cela nous donne deux germes Λ_{11} et Λ_{12} à partir de Λ_1 et deux autres germes Λ_{21} et Λ_{22} à partir de Λ_2 , tous de hauteur h_2 , voir figure 2. Continuons cette procédure jusqu'à la k -ème étape. Nous avons donc 2^k germes noté $\Lambda_{r_1 \dots r_k}$ avec $r_i \in \{1, 2\}$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$, chacun avec une longueur de base $b_k = 2^{-k} \cdot b_0$ et de hauteur h_k .

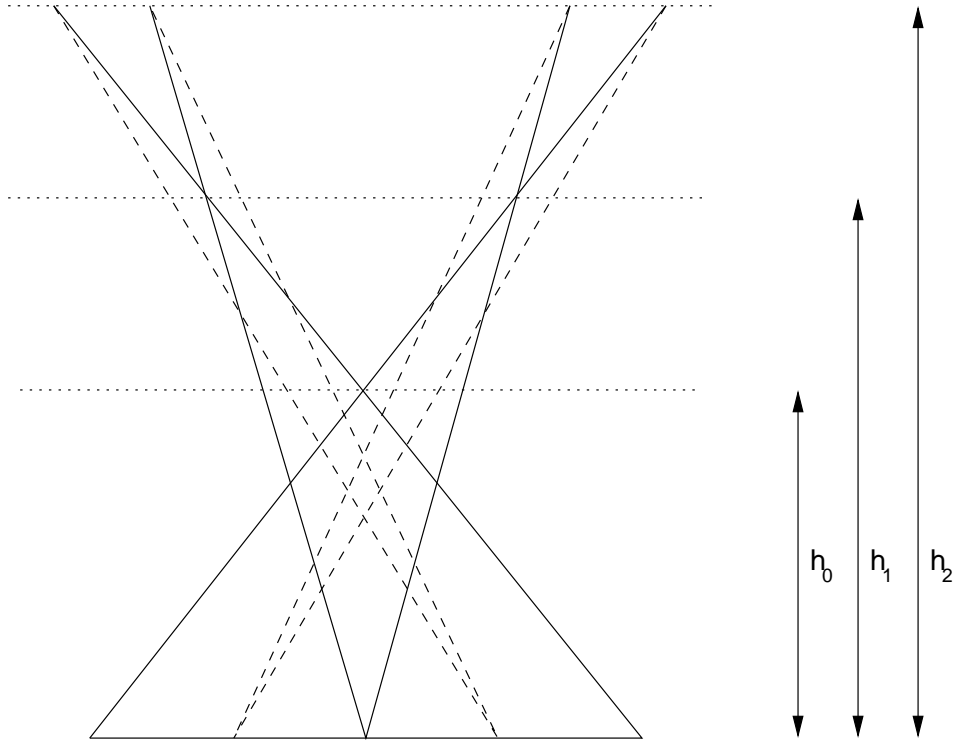


FIG. 2 – La deuxième étape de la construction

Définition 3.3

On définit $E(\varepsilon, k)$ par $E(\varepsilon, k) = \bigcup \{\Lambda_{r_1 \dots r_k} : r_i \in \{1, 2\}, i \in \{1, \dots, k\}\}$.

Nous pouvons majorer l'aire de $E(\varepsilon, k)$ en prenant l'aire de Λ et en y ajoutant l'aire de tous les bras obtenu lors de la construction de la figure germée.

Proposition 3.4

L'aire d'un des bras obtenus lors de la i -ème étape est

$$\frac{b_{i-1} \cdot (h_i - h_{i-1})^2}{2(2h_i - h_{i-1})}.$$

Démonstration. La preuve est exactement celle faite lors de la preuve de la proposition 3.2 en remplaçant h_0 par h_{i-1} , h_1 par h_i et b par b_{i-1} . \square

Théorème 3.5

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \leq |E(\varepsilon, k)| \leq \frac{3}{2}\varepsilon^2$.

Démonstration. Comme la hauteur et la longueur de la base de ABC sont ε , l'aire de ABC est $\frac{1}{2}\varepsilon^2$. De plus, ABC est clairement inclus dans $E(\varepsilon, k)$.

Donc $|E(\varepsilon, k)| \geq \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Montrons maintenant que $|E(\varepsilon, k)| \leq \frac{3}{2}\varepsilon^2$.

Nous avons les relations suivantes :

$$h_i - h_{i-1} = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{j} - \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} = \varepsilon \cdot \frac{1}{i+1}; \quad (3)$$

$$2h_i - h_{i-1} = 2 \cdot \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{j} - \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} = \varepsilon \cdot \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{j} + \frac{2}{i+1} \right) \geq \varepsilon. \quad (4)$$

Remarque 3.6

La dernière minoration de l'équation (4) est grossière et peut être améliorée, mais elle nous suffit pour ce travail.

Comme l'aire de $E(\varepsilon, k)$ est plus grand ou égal à l'aire de ABC additionné à la somme de l'aire de tous les bras, nous pouvons majorer $|E(\varepsilon, k)|$.

Rappelons que $b_i = 2^{-i}b_0$ et que $b_0 = \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
|E(\varepsilon, k)| &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{2^i \cdot b_{i-1} \cdot (h_i - h_{i-1})^2}{2(2h_i - h_{i-1})} \right) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{2^i \cdot 2^{-(i-1)} \cdot b_0 \cdot (h_i - h_{i-1})^2}{2(2h_i - h_{i-1})} \right) \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{2^i \cdot 2^{-(i-1)} \cdot b_0 \cdot \varepsilon^2}{2(2h_i - h_{i-1}) \cdot (i+1)^2} \right) \\
&\stackrel{(4)}{\leq} \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{2^i \cdot 2^{-(i-1)} \cdot b_0 \cdot \varepsilon^2}{2\varepsilon \cdot (i+1)^2} \right) = \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon^2}{\varepsilon \cdot (i+1)^2} \right) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{i=2}^k \left(\frac{\varepsilon^2}{i^2} \right) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2} \right) \varepsilon^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \varepsilon^2 \\
&\leq \frac{3}{2} \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.7

Ce théorème nous montre que nous pouvons estimer l'aire de $E(\varepsilon, k)$ par le haut et par le bas sans que cela dépende de k .

4 Un résultat de Fefferman

4.1 Construction

Nous commençons par une construction que nous utiliserons dans la preuve. Soit R un rectangle $ABCD$ de \mathbb{R}^2 . Supposons que $AB > AD$ de tel sorte que R soit de hauteur AD et de longueur AB . Créons une copie $A_1B_1C_1D_1$ de R et collons la à R tel que les côtés AB et B_1C_1 coïncident, faisons de même avec une deuxième copie $A_2B_2C_2D_2$ tel que les côtés BC et A_2D_2 coïncident. Nous avons donc obtenu un rectangle $\tilde{R} = A_1B_2C_2D_1$ de hauteur AD et de longueur $3AB$, voir figure 3.

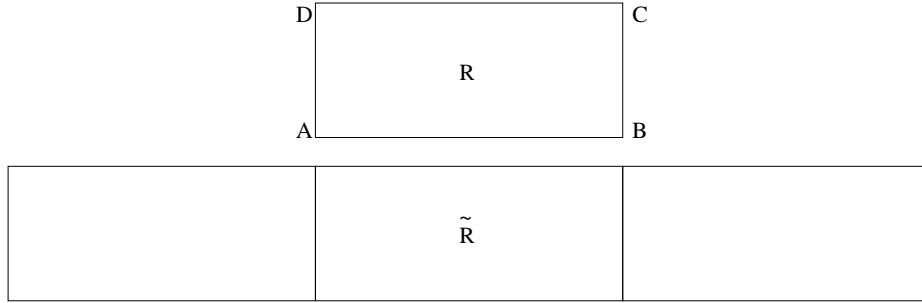


FIG. 3 – Le rectangle R et ses copies

Définition 4.1

Soit \tilde{R} le rectangle construit ci-dessus à partir du rectangle R . Alors on pose $R' = \tilde{R} \setminus R$, voir figure 4.

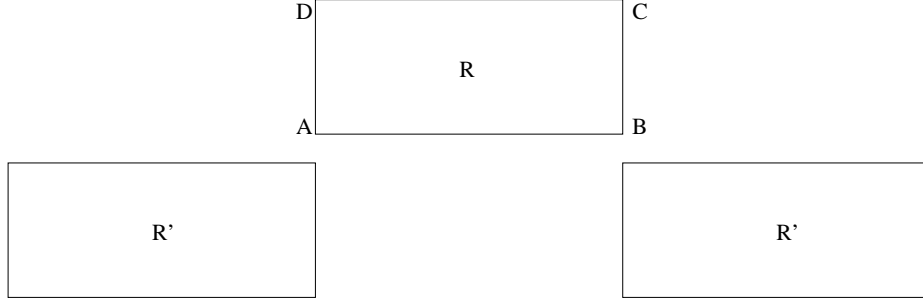


FIG. 4 – La figure R'

4.2 Lemmes techniques**Définition 4.2**

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous définissons $h_k := \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j}$.

Lemme 4.3

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons que $\frac{\sqrt{5}}{2} h_k < 3 \ln(k+2)$.

Démonstration. Par la première formule de la moyenne, nous avons :

$$\ln(k+1) = \int_1^{k+1} \frac{dt}{t} = \sum_{i=1}^k \int_i^{i+1} \frac{dt}{t} \geq \sum_{i=1}^k 1 \cdot \min_{i \leq t \leq i+1} \frac{1}{t} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i+1} = h_k - 1,$$

ce qui implique que

$$\frac{\sqrt{5}}{2} h_k < \frac{3}{2} h_k \leq \frac{3}{2} (\ln(k+1) + 1).$$

Montrons maintenant que

$$\frac{\ln(k+1) + 1}{2} < \ln(k+2),$$

ce qui terminera la preuve. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\ln(k+2) &= \int_1^{k+2} \frac{dt}{t} = \int_1^{k+1} \frac{dt}{t} + \int_{k+1}^{k+2} \frac{dt}{t} \\
&> \ln(k+1) + \min_{k+1 \leq t \leq k+2} \frac{1}{t} = \ln(k+1) + \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{\ln(k+1)}{2} + \left(\frac{\ln(k+1)}{2} + \frac{1}{k+2} \right).
\end{aligned}$$

De plus,

1. si $k \geq 2$, on a :

$$\ln(k+1) > \ln(e) = 1;$$

2. si $k = 1$, on a :

$$\frac{\ln(k+1)}{2} + \frac{1}{k+2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}.$$

On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\ln(k+2) > \frac{\ln(k+1) + 1}{2}.$$

□

Lemme 4.4

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons que $h_k > \ln(k+2)$.

Démonstration. En effet,

$$\ln(k+2) = \int_1^{k+2} \frac{dt}{t} = \sum_{i=1}^{k+1} \int_i^{i+1} \frac{dt}{t}.$$

Grâce à la première formule de la moyenne, nous avons :

$$\ln(k+2) = \sum_{i=1}^{k+1} \int_i^{i+1} \frac{dt}{t} < \sum_{i=1}^{k+1} 1 \cdot \max_{i \leq t \leq i+1} \frac{1}{t} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} = h_k.$$

□

4.3 Un résultat de Feffermann

Théorème 4.5 (Lemme de Fefferman)

Soit $\delta > 0$, alors il existe un sous-ensemble E de \mathbb{R}^2 mesurable au sens de Lebesgue et un ensemble fini de rectangle $R_j, j = 1, \dots, k$ de \mathbb{R}^2 tel que :

- (i) les R_j sont deux à deux disjoints ;
- (ii) on a $\frac{1}{2} \leq |E| \leq \frac{3}{2}$;
- (iii) on a $|E| \leq \delta \sum_{j=1}^k |R_j|$;
- (iv) pour tout $j = 1, \dots, k$ on a $|R'_j \cap E| \geq \frac{1}{12} |R_j|$.

Démonstration. 1. **Construction de E .**

Soit un triangle ABC de \mathbb{R}^2 isocèle en C , de hauteur 1 et de base AB tel que $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$. Posons $k \in \mathbb{N}$ tel que $e^{1/\delta} < k + 2$. Pour ce triangle ABC et pour ce k , construisons la figure germée de ABC et posons $E = E(1, k)$. Nous avons donc par le théorème 3.5 que $\frac{1}{2} \leq |E| \leq \frac{3}{2}$ ce qui prouve la propriété (ii).

2. **Construction des R_j .**

Rappelons que tous les intervalles de la forme $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}] \subset [0, 1]$ pour $j \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ sont la base d'exactly un triangle germé $A_j B_j C_j$, posons $A_j = (j2^{-k}, 0)$, $B_j = ((j+1)2^{-k}, 0)$ et C_j le dernier sommet du triangle. Définissons maintenant le rectangle R_j comme suit :

Le rectangle R_j est inclus dans l'angle $\angle A_j C_j B_j$, un des sommets de R_j est soit A_j soit B_j , la longueur du plus long coté de R_j est $3 \ln(k+2)$ et l'intersection de R_j et de $A_j B_j C_j$ est seulement le sommet A_j ou B_j choisis plus haut. Notons D_j le sommet de R_j placé sur le même petit coté que A_j , voir figure 5.

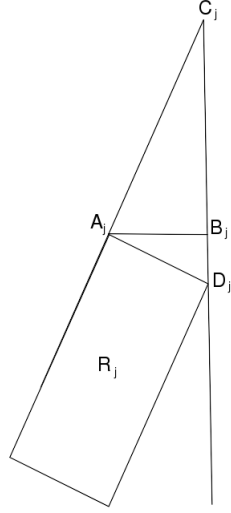


FIG. 5 – Le rectangle R_j

3. Preuve de la propriété (iv)

- (a) Rappelons que $A_0 = A$ et que $AC = \sqrt{1^2 + (1/2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Par symétrie, supposons que $A_j C_j \geq B_j C_j$. Nous avons que la longueur maximale de $A_j C_j$ est $\frac{\sqrt{5}}{2} h_k$. En effet, pour tout $j = 1, \dots, k$ nous avons que la longueur de $A_j C_j$ est plus petite que la longueur $A_0 C_0$. Soit N le point $(0, h_k)$ tel que le triangle $A_0 C_0 N$ soit rectangle en N . Alors les triangles $A_0 N C_0$ et AMC sont semblables. Nous avons donc, par le théorème de Thalès, que

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{A_0 C_0}{h_k},$$

ce qui implique que $A_0 C_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} h_k$. Par le lemme 4.3, nous avons que R'_j contient le triangle $A_j B_j C_j$. En effet, $\frac{\sqrt{5}}{2} h_k < 3 \ln(k+2)$

implique que la longueur de A_jC_j est strictement plus petite que celle de R_j . Un des deux rectangles qui composent R'_j a un de ses sommets en A_j ou en B_j (puisque R_j a un de ses sommets en A_j ou en B_j), supposons que ce sommet est A_j . Nous avons donc que le segment A_jC_j est inclus dans le bord de R'_j . Ceci entraine que R'_j contient le triangle $A_jB_jC_j$.

Rappelons que

$$|A_jB_jC_j| = \frac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2} = \frac{2^{-k} \cdot h_k}{2}.$$

Nous avons donc que

$$|R'_j \cap E| \geq |A_jB_jC_j| = \frac{2^{-k} \cdot h_k}{2} \stackrel{(4.4)}{>} 2^{-k-1} \ln(k+2). \quad (5)$$

(b) Le triangle $A_jD_jC_j$ est rectangle en A_j ce qui implique que

$$\angle A_jC_jD_j = \pi/2 - \angle A_jD_jC_j.$$

Nous avons de plus que $\angle A_jC_jD_j = \angle A_jC_jB_j$ et $\angle A_jD_jC_j = \angle A_jD_jB_j$ car C_j, B_j et D_j sont alignés. Nous avons donc que

$$\cos(\angle A_jC_jB_j) = \cos(\pi/2 - \angle A_jD_jB_j) = \sin(\angle A_jD_jB_j).$$

Ce qui implique que

$$\cos(\angle A_jC_jB_j) = \sin(\angle A_jD_jB_j) \leq \frac{\sin(\angle A_jD_jB_j)}{\sin(\angle A_jB_jD_j)},$$

puisque $\sin(\angle A_jB_jD_j) \leq 1$. De plus, par la loi des sinus appliquée au triangle $A_jB_jD_j$, nous avons que

$$\frac{A_jB_j}{\sin(\angle A_jD_jB_j)} = \frac{A_jD_j}{\sin(\angle A_jB_jD_j)},$$

le tout entraine que

$$A_jD_j = 2^{-k} \frac{\sin(\angle A_jB_jD_j)}{\sin(\angle A_jD_jB_j)} \leq \frac{2^{-k}}{\cos(\angle A_jC_jB_j)}. \quad (6)$$

(c) Appliquons la loi des cosinus au triangle $A_jB_jC_j$, nous obtenons :

$$(A_jB_j)^2 = (B_jC_j)^2 + (A_jC_j)^2 - 2 \cdot B_jC_j \cdot A_jC_j \cdot \cos(\angle A_jC_jB_j).$$

ce qui montre que

$$\cos(\angle A_j C_j B_j) = \frac{-(A_j B_j)^2 + (B_j C_j)^2 + (A_j C_j)^2}{2 \cdot B_j C_j \cdot A_j C_j}. \quad (7)$$

De plus, nous avons :

$$h_k \leq A_j C_j \leq \frac{\sqrt{5}}{2} h_k$$

et

$$h_k \leq B_j C_j \leq \frac{\sqrt{5}}{2} h_k.$$

Ceci et l'équation (7) impliquent que

$$\begin{aligned} \cos(\angle A_j C_j B_j) &= \frac{-(A_j B_j)^2 + (B_j C_j)^2 + (A_j C_j)^2}{2 \cdot B_j C_j \cdot A_j C_j} \\ &\geq \frac{-(2^{-k})^2 + (h_k)^2 + (h_k)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} h_k \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} h_k} = \frac{2h_k^2 - (2^{-k})^2}{2 \cdot \frac{5}{4} h_k^2} \\ &= \frac{4}{5} \left(1 - \frac{(2^{-k})^2}{2h_k^2} \right) \geq \frac{4}{5} - \frac{4 \cdot (2^{-k})^2}{5 \cdot 2} \\ &= \frac{4}{5} - \frac{4}{5} (2^{-2k+1}) \geq \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot 2^{-3} \\ &\geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

puisque $k \geq 2$. En remplaçant cette inégalité dans l'équation (6), nous obtenons :

$$A_j D_j \leq \frac{2^{-k}}{\cos(\angle A_j C_j B_j)} \leq 2^{-k+1} = 2A_j B_j.$$

En combinant ceci et l'équation (5), nous trouvons :

$$\begin{aligned} |R'_j \cap E| &\geq 2^{-k-1} \ln(k+2) \\ &= \frac{1}{12} \cdot 2^{-k+1} \cdot 3 \ln(k+2) \\ &\geq \frac{1}{12} \cdot A_j D_j \cdot 3 \ln(k+2) = \frac{1}{12} |R_j|, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété (iv).

4. Preuve de la propriété (i).

Montrons que $R_i \cap R_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Pour un rectangle R_j , construisons un quadrilatère Q_j avec les propriétés suivantes :

- (a) R_j est inclus dans Q_j ;
- (b) Q_j est inclus dans l'angle $\angle A_j C_j B_j$;
- (c) l'intersection de Q_j et du triangle $A_j B_j C_j$ est seulement A_j .

Le quadrilatère choisi est donc « en dessous » du triangle germé, voir figure 6. Notons Q_j^l , pour $l \in \{1, \dots, k\}$, le quadrilatère Q_j construit lors de la l -ème étape de la construction de la figure germée. Montrons par induction que $Q_i^k \cap Q_j^k = \emptyset$ si $i \neq j$. Cela impliquera que $R_i \cap R_j = \emptyset$. Base de la récurrence :

Soient Q_1^1 et Q_2^1 les deux quadrilatères obtenus lors de la première étape. Ils sont clairement disjoints.

Pas de récurrence :

Supposons que les $Q_1^{k-1}, \dots, Q_{2^{k-1}}^{k-1}$ sont disjoints. Soient Q_i^k et Q_j^k avec $i \neq j$. Montrons qu'ils sont disjoints. Nous avons deux cas :

- (a) Q_i^k et Q_j^k sont des sous-ensembles du même quadrilatère $Q = Q_l^{k-1}$ pour $l \in \{1, \dots, 2^{k-1}\}$. Nous considérons donc les Q_i^k et Q_j^k comme les deux quadrilatères obtenus lors de la première étape de la germe de Q et donc par analogie au cas $k = 1$, Q_i^k et Q_j^k sont disjoints.
- (b) Q_i^k et Q_j^k ne sont pas des sous-ensembles du même quadrilatère. On a donc qu'il existe $l, m \in \{1, \dots, 2^{k-1}\}$ tel que $Q_i^k \subset Q_l^{k-1}$ et $Q_j^k \subset Q_m^{k-1}$ avec $l \neq m$. Or, Q_l^{k-1} et Q_m^{k-1} sont disjoints donc Q_i^k et Q_j^k le sont aussi.

La récurrence est donc prouvée. La propriété (i) est ainsi vérifiée.

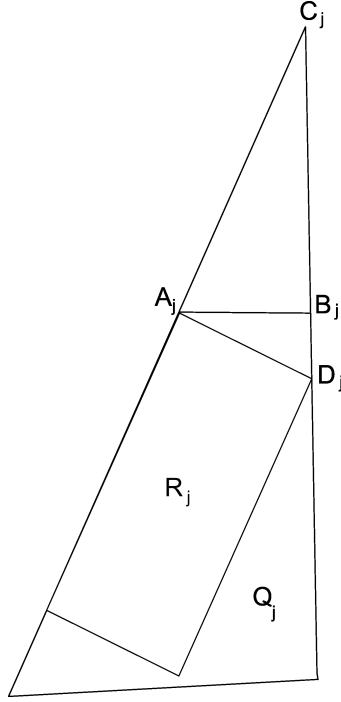


FIG. 6 – Le quadrilatère Q_j

5. **Preuve de la propriété (iii).**

Rappelons l'équation (6) vue précédemment :

$$A_j D_j = 2^{-k} \frac{\sin(\angle A_j B_j D_j)}{\sin(\angle A_j D_j B_j)}.$$

Nous avons donc, par l'inégalité de Jordan :

$$A_j D_j \geq 2^{-k} \cdot \sin(\angle A_j B_j D_j) \geq 2^{-k-1} \cdot \angle A_j B_j D_j.$$

Or, l'angle $\angle A_j B_j D_j$ est plus grand que l'angle $\angle B_j A_j C_j$, car si on appelle d_j la droite passant par A_j et parallèle à $B_j C_j$, nous avons que l'angle, noté α , entre cette droite et le segment $A_j B_j$ est le même que l'angle $\angle A_j B_j D_j$ et l'angle $\angle B_j A_j C_j$ est clairement inclus dans l'angle α . Par conséquent :

$$A_j D_j \geq 2^{-k-1} \cdot \angle B_j A_j C_j.$$

Cependant, la plus petite valeur de l'angle $\angle B_j A_j C_j$ est atteinte en $j = 0$. De plus, $\angle B_0 A_0 C_0 = \angle BAC$ et $\tan(\angle BAC) = \frac{1}{1/2}$, car la hauteur et la base de ABC sont égales à 1. Nous avons par conséquent :

$$A_j D_j \geq 2^{-k-1} \cdot \angle B_j A_j C_j = 2^{-k-1} \cdot \arctan(2) > 2^{-k-1} \cdot 1.$$

Nous avons donc que

$$A_j D_j \geq 2^{-k-1},$$

et donc l'aire de chaque R_j est plus grande que $2^{-k-1} \cdot 3 \ln(k+2)$.

Ce qui montre que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j| &\geq 2^k \cdot 2^{-k-1} \cdot 3 \ln(k+2) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \ln(k+2) \geq |E| \cdot \ln(k+2) \\ &\geq \frac{|E|}{\delta}. \end{aligned}$$

puisque $|E| \leq 3/2$ et que k a été choisi tel que $k+2 > e^{1/\delta}$, ceci prouve le point (iii).

Les quatres propriétés du théorème ont donc été prouvées. \square

5 Analyse de Fourier et Multiplicateurs de L^p

5.1 Rappels

Définition 5.1 ($L^p(\mathbb{R}^n)$)

Soit $1 \leq p < \infty$, alors l'ensemble $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est défini par

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable}, |f|^p \text{ intégrable}\}.$$

Soit \sim la relation d'équivalence définie par $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ presque partout. Alors $L^p(\mathbb{R}^n)$ est défini par

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \sim.$$

Remarque 5.2

Dans la définition précédente, quand on dit que f est mesurable ou intégrable, on entend au sens de Lebesgue.

Définition 5.3 (Norme sur $L^p(\mathbb{R}^n)$)

Soit $1 \leq p < \infty$, alors la norme de $L^p(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Remarque 5.4

On peut prouver que c'est bien une norme.

Théorème 5.5

Muni de la norme ci-dessus, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

Définition 5.6 (Conjugués au sens de Young)

Soit $1 < p < \infty$, alors son conjugué au sens de Young est p' tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Rappel 5.7 (Inégalité de Hölder)

Soit $1 < p < \infty$ et p' son conjugué au sens de Young. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

Définition 5.8 (Transformée de Fourier)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction intégrable. On note \hat{f} ou $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n .

Définition 5.9 (Transformée inverse de Fourier)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction intégrable. On note f^\vee la transformée inverse de Fourier définie par

$$f^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n .

Rappel 5.10 (sur les fonctions caractéristiques)

Soient E et F deux ensembles disjoints et $n \in \mathbb{N}$. Si χ_E est la fonction caractéristique de E et χ_F celle de F . Alors

$$(\chi_E)^n = \chi_E,$$

et

$$\chi_E \cdot \chi_F = 0.$$

Définition 5.11 (Norme d'un opérateur)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit T un opérateur de E dans F . Alors on définit la norme de T par

$$\|T\|_{E \rightarrow F} = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_E \leq 1}} \|T(f)\|_F.$$

5.2 Définitions et notations

Notation 5.12

Soient $a > 0$, f une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n et $x \in \mathbb{R}^n$. On note $\delta^a(f)$ la dilatation définie par $\delta^a(f)(x) = f(ax)$.

Notation 5.13

Nous notons $B(0, 1)$ le disque unité de \mathbb{R}^2 .

Définition 5.14 (n -multi-indice)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un n -multi-indice α est un n -tuple d'entiers non-négatifs.

Notation 5.15

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un n -multi-indice. Alors on définit x^α par $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$. De plus $\partial^\alpha f$ dénote la dérivée $\partial_1^{\alpha_1} f \cdot \dots \cdot \partial_n^{\alpha_n} f$, où $\partial_i^{\alpha_i}$ est la α_i -ème dérivée de f par rapport à la i -ème variable.

Définition 5.16 (Fonctions de Schwartz)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ . On dit que f est une fonction de Schwartz si pour tout n -multi-indice α et pour tout n -multi-indice β , il existe une constante positive $C_{\alpha,\beta}$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

L'ensemble des fonctions de Schwartz de \mathbb{R}^n se note $S(\mathbb{R}^n)$ ou simplement S .

Remarque 5.17

L'espace S contient l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

Définition 5.18 (Multiplicateur)

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ et m une fonction bornée de \mathbb{R}^n . On dit que m est un multiplicateur de $L^p(\mathbb{R}^n)$ si l'opérateur

$$T_m(f) = (\widehat{fm})^\vee$$

est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour toute fonction $f \in S$. On note $M_p(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des multiplicateurs de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Définition 5.19 (Norme sur $M_p(\mathbb{R}^n)$)

Soit $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$. Nous définissons la norme sur $M_p(\mathbb{R}^n)$ par

$$\|m\|_{M_p} = \|T_m\|_{L^p \rightarrow L^p}.$$

5.3 Transformée de Hilbert

Dans cette section, nous allons définir et énoncer quelques résultats sur les transformée de Hilbert sans, toutefois, les prouver. Les preuves se trouvent dans [Gra]

Définition 5.20 (Transformée de Hilbert tronquée)

Soit $\varepsilon > 0$. La transformée de Hilbert tronquée de $f \in S(\mathbb{R})$ (de poids ε) est définie par

$$H^{(\varepsilon)}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)dy}{y}.$$

Définition 5.21 (Transformée de Hilbert)

La transformée de Hilbert de $f \in S(\mathbb{R})$ est définie par

$$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H^{(\varepsilon)}(f)(x).$$

Remarque 5.22

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $H(f)(x)$ est définie pour toute fonction f intégrable et Hölder-continue.

Théorème 5.23

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $\chi_{[a,b]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$H(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{|x - a|}{|x - b|} \right).$$

Théorème 5.24

Nous pouvons écrire

$$H(f)(x) = \left(\widehat{f}(x)(-i \cdot \operatorname{sgn}(x)) \right)^\vee,$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x , c'est-à-dire :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Avant de parvenir à montrer que la fonction caractéristique du disque unité de \mathbb{R}^2 n'est pas un multiplicateur de L^p pour $p \neq 2$, nous avons besoin des lemmes suivants :

5.4 Lemmes**Rappel 5.25**

Soit Id la fonction identité sur \mathbb{R} . Alors $\widehat{Id} = \chi_{\mathbb{R}}$.

Lemme 5.26

Soient $R \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle centré en l'origine et v le vecteur unité parallèle au côté le plus long de R . Soit encore le demi-plan \mathcal{H} défini par

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot v \geq 0\}$$

et le multiplicateur $S_{\mathcal{H}}$ défini par

$$S_{\mathcal{H}}(f) = (\widehat{f\chi_{\mathcal{H}}})^\vee,$$

pour $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Alors

$$|S_{\mathcal{H}}(\chi_R)| \geq \frac{1}{10} \chi_{R'}.$$

Remarque 5.27

Si R n'est pas centrée en l'origine, nous arrivons à la même conclusion en prenant l'un des demi-plans formés par la droite passant au centre du rectangle et parallèle à son côté le plus court.

Démonstration. Quitte à appliquer une rotation, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que $R = [-a, a] \times [-b, b]$ avec $0 < a \leq b < \infty$ et que $v = e_2 = (0, 1)$.

Comme $\chi_R(x_1, x_2) = \chi_{[-a, a]}(x_1)\chi_{[-b, b]}(x_2)$, $\chi_{\mathcal{H}}(x_1, x_2) = \chi_{[0, \infty)}(x_2)$ et par le théorème de Fubini-Tonelli, on a que

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{H}}(\chi_R)(x_1, x_2) &= (\widehat{\chi_R \chi_{\mathcal{H}}})^{\vee}(x_1, x_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\chi_R \chi_{\mathcal{H}}})(y_1, y_2) e^{2\pi i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dy_1 dy_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathcal{H}}(y_1, y_2) \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\chi_R(z_1, z_2) e^{-2\pi i(y_1 z_1 + y_2 z_2)} dz_1 dz_2) \right) \\
&\quad \cdot e^{2\pi i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dy_1 dy_2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a, a]}(z_1) e^{-2\pi i y_1(z_1 - x_1)} dz_1 dy_1 \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0, \infty)}(y_2) e^{2\pi i x_2 y_2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-b, b]}(z_2) e^{-2\pi i y_2 z_2} dz_2 dy_2 \right) \\
&= \chi_{[-a, a]}(x_1) \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0, \infty)}(y_2) e^{2\pi i x_2 y_2} \widehat{\chi_{[-b, b]}}(y_2) dy_2 \\
&= \chi_{[-a, a]}(x_1) (\widehat{\chi_{[-b, b]}} \chi_{[0, \infty)})^{\vee}(x_2). \tag{8}
\end{aligned}$$

Par le théorème 5.24, nous avons que

$$\mathcal{F}(H(\chi_{[-b, b]})(x_2)) = (\widehat{\chi_{[-b, b]}}(x_2)(-i \cdot \operatorname{sgn}(x_2))).$$

Par la linéarité de la transformée de Fourier, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\left(\frac{Id + i \cdot H}{2}\right)(\chi_{[-b, b]})(x_2)\right) &= \left(\widehat{\chi_{[-b, b]}}(x_2) \left(\frac{\chi_{\mathbb{R}}(x_2) + \operatorname{sgn}(x_2)}{2}\right)\right) \\
&= \widehat{\chi_{[-b, b]}}(x_2) \chi_{[0, \infty)}(x_2),
\end{aligned}$$

presque partout. Cela implique que

$$((\widehat{\chi_{[-b, b]}} \chi_{[0, \infty)})(x_2))^{\vee} = \left(\left(\frac{Id + i \cdot H}{2}\right)(\chi_{[-b, b]})(x_2)\right).$$

Nous avons, en remplaçant cela dans l'équation (8) :

$$S_{\mathcal{H}}(\chi_R)(x_1, x_2) = \chi_{[-a, a]}(x_1) \left(\left(\frac{Id + i \cdot H}{2}\right)(\chi_{[-b, b]})(x_2)\right).$$

Ce qui nous donne, grâce au théorème 5.23 :

$$\begin{aligned}
|S_{\mathcal{H}}(\chi_R)(x_1, x_2)| &= \left| \frac{1}{2} \chi_{[-a, a]}(x_1) ((Id + i \cdot H)(\chi_{[-b, b]})(x_2)) \right| \\
&\geq \frac{1}{2} \chi_{[-a, a]}(x_1) |(i \cdot H)(\chi_{[-b, b]})(x_2)| \\
&= \frac{1}{2} \chi_{[-a, a]}(x_1) |H(\chi_{[-b, b]})(x_2)| \\
&= \frac{1}{2\pi} \chi_{[-a, a]}(x_1) \left| \ln \left(\frac{|x_2 + b|}{|x_2 - b|} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Soit $(y_1, y_2) \in R'$, alors $\chi_{[-a, a]}(y_1) = 1$ et $b < |y_2| < 3b$. Nous avons donc deux cas ; soit $b < y_2 < 3b$, soit $-3b < y_2 < -b$.

1. Si $b < y_2 < 3b$, alors on a :

$$\left| \frac{y_2 + b}{y_2 - b} \right| = \frac{y_2 + b}{y_2 - b} > 2,$$

car la fonction $\frac{y_2 + b}{y_2 - b}$ est décroissante en y_2 sur $(b, 3b]$ et $\frac{3b + b}{3b - b} = 2$.

2. Si $-3b < y_2 < -b$, alors on a :

$$\left| \frac{y_2 - b}{y_2 + b} \right| = \frac{-(y_2 - b)}{-(y_2 + b)} = \frac{y_2 - b}{y_2 + b} > 2.$$

Nous avons donc que

$$\left| \ln \left(\frac{|y_2 + b|}{|y_2 - b|} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{|y_2 - b|}{|y_2 + b|} \right) \right| > \ln(2).$$

Par conséquent, nous avons pour $(y_1, y_2) \in R'$:

$$|S_{\mathcal{H}}(\chi_R)(y_1, y_2)| \geq \frac{\ln(2)}{2\pi} \geq \frac{1}{10}.$$

Ce qui implique que

$$|S_{\mathcal{H}}(\chi_R)| \geq \frac{1}{10} \chi_{R'}.$$

□

Lemme 5.28 (Lemme de Meyer)

Soient $j \in \mathbb{N}$ et v_1, \dots, v_j, \dots des vecteurs unités de \mathbb{R}^2 . Définissons le demi-plan \mathcal{H}_j par

$$\mathcal{H}_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot v_j \geq 0\}.$$

Soit encore l'opérateur

$$S_{\mathcal{H}}(f) = (\hat{f}\chi_{\mathcal{H}})^{\vee},$$

pour $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Supposons que la fonction caractéristique du disque unité de \mathbb{R}^2 soit un multiplicateur de $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour $1 < p < \infty$, c'est à dire, que l'opérateur

$$T(f) = (\hat{f}\chi_{B(0,1)})^{\vee}$$

soit borné, pour tout $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Notons sa norme $B_p < \infty$. Alors nous avons

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

pour toute fonction f_j bornée et à support compact.

Avant de prouver ce lemme, nous allons énoncer deux théorèmes que nous utiliserons dans la preuve mais que nous ne prouverons pas.

Théorème 5.29

Soient $1 \leq p, q < \infty$ et (X, μ) et (Y, ν) deux espace mesurés. Si T est un opérateur linéaire borné de $L^p(X)$ dans $L^q(Y)$ et de norme B . Alors on a

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^k |T(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \leq C_{p,q} B \left\| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

pour une constante $C_{p,q}$ qui ne dépend que de p et q et pour toute fonction $f_j \in L^p(X)$. De plus $C_{p,q} = 1$ si $p \leq q$.

Théorème 5.30

Soient $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $a > 0$. Alors

$$\|\delta^a(m)\|_{M_p} = \|m\|_{M_p}.$$

Démonstration du lemme. Nous allons prouver ce lemme pour des fonctions f_j qui sont des fonctions de Schwartz. Le cas général est obtenu par un passage à la limite. Soient $R > 0$, le disque $D_{j,R} := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - Rv_j| \leq R\}$ et le multiplicateur $T_{j,R}(f) := (\hat{f}\chi_{D_{j,R}})^{\vee}$ associé au disque $D_{j,R}$. Observons que $D_{j,R} \rightarrow \mathcal{H}_j$ quand $R \rightarrow \infty$, voir figure 7.

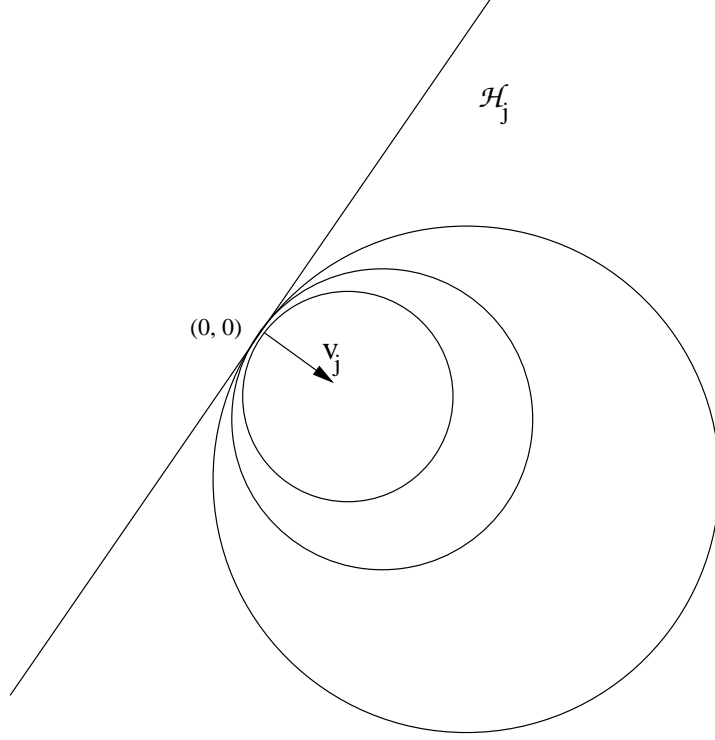


FIG. 7 – La suite des $D_{j,R}$ qui converge vers le demi plan \mathcal{H}_j

Soit $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Comme $|\hat{f}\chi_{D_{j,R}}| \leq |\hat{f}| \in L^1(\mathbb{R}^2)$, nous avons par le théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T_{j,R}(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} (\hat{f}\chi_{D_{j,R}})^\vee = (\hat{f} \lim_{R \rightarrow \infty} \chi_{D_{j,R}})^\vee = (\hat{f}\chi_{\mathcal{H}})^\vee = S_{\mathcal{H}_j}(f).$$

Nous avons donc, par le lemme de Fatou, que

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^k |T_{j,R}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \quad (9)$$

Soit $T_R(f) = (\hat{f}\chi_{B(0,R)})^\vee$. En effectuant une translation, nous avons l'identité suivante :

$$T_{j,R}(f)(x) = e^{2\pi i R \langle v_j, x \rangle} T_R(e^{-2\pi i R \langle v_j, x \rangle} f)(x). \quad (10)$$

Posons la fonction g_j définie par $g_j(x) = e^{-2\pi i R \langle v_j, x \rangle} f(x)$, nous avons alors, en combinant les équations (9) et (10) :

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^k |T_R(g_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

De plus, grâce à l'identité du théorème 5.30, nous avons que l'opérateur T_R a la même norme B_p que l'opérateur T . Appliquons maintenant le théorème 5.29, nous obtenons que

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^k |T_R(g_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^k |g_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Ceci nous donne que

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p,$$

ce qui termine la preuve. □

Nous allons maintenant pouvoir prouver le théorème de Fefferman grâce à tous le travail effectué précédemment.

6 Le théorème de Fefferman

Théorème 6.1 (Théorème de Fefferman)

La fonction caractéristique du disque unité de \mathbb{R}^2 n'est pas un multiplicateur de $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour $1 < p < \infty, p \neq 2$.

Démonstration. Par dualité, il suffit de prouver le théorème pour $p > 2$. Supposons, par l'absurde qu'il existe un $p > 2$ tel que $\chi_{B(0,1)} \in M_p(\mathbb{R}^2)$ et trouvons une contradiction. Soient $\delta > 0$ et les ensembles E et $R_j, j \in \{1, \dots, k\}$ défini dans le lemme 4.5. Soient encore $f_j = \chi_{R_j}$, v_j le vecteur unité parallèle au plus long côté de R_j et \mathcal{H}_j défini par

$$\mathcal{H}_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot v_j \geq 0\}.$$

Rappelons que la condition (iv) du lemme 4.5 implique que pour tout $j = 1, \dots, k$ on a

$$|R'_j \cap E| \geq \frac{1}{12}|R_j|.$$

En utilisant le lemme 5.26, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I &:= \int_E \sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^k \int_E |S_{\mathcal{H}_j}(\chi_{R_j})(x)|^2 dx \\ &\geq \sum_{j=1}^k \int_E \left(\frac{\chi_{R'_j}(x)}{10} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{100} \sum_{j=1}^k |E \cap R'_j| \\ &\geq \frac{1}{1200} \sum_{j=1}^k |R_j|. \end{aligned} \tag{11}$$

Notons que $\frac{2}{p} + \frac{p-2}{p} = 1$. Appliquons maintenant l'inégalité de Hölder à I

avec des exposants $\frac{p}{2}$ et $\frac{p}{p-2}$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)(x)|^2 \cdot \chi_E(x) dx \\
&= \left\| \sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \cdot \chi_E \right\|_1 \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right\|_{p/2} \cdot |E|^{\frac{p-2}{p}} \\
&= \left\| \left(\sum_{j=1}^k |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^2 \cdot |E|^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

En combinant ceci et le lemme 5.28, nous obtenons :

$$I \leq B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^2 |E|^{\frac{p-2}{p}}. \quad (12)$$

Nous avons de plus que, puisque les R_j sont disjoints :

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{j=1}^k |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^k \chi_{R_j}^2(x) \right)^{p/2} dx \right)^{2/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^k \chi_{R_j}(x) \right)^{p/2} dx \right)^{2/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^k \chi_{R_j}(x) dx \right)^{2/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R_j}(x) dx \right)^{2/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right)^{2/p}.
\end{aligned}$$

En combinant ceci à l'équation (12), nous obtenons :

$$I \leq B_p \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right)^{\frac{2}{p}} |E|^{\frac{p-2}{p}}.$$

Toutefois, par la propriété (iii) du lemme 4.5, nous avons que

$$|E| \leq \delta \sum_{j=1}^k |R_j|.$$

Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} I &\leq B_p \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right)^{\frac{2}{p}} |E|^{\frac{p-2}{p}} \\ &\leq B_p \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right)^{\frac{2}{p}} \delta^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right)^{\frac{p-2}{p}} \\ &= B_p \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right) \delta^{\frac{p-2}{p}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Combinons maintenant les équations (11) et (13), nous obtenons ainsi :

$$\sum_{j=1}^k |R_j| \leq 1200 B_p \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right) \delta^{\frac{p-2}{p}}.$$

Ce qui est une contradiction pour un δ assez petit. Notre hypothèse est fausse et donc il n'existe pas de $p > 2$ tel que $\chi_{B(0,1)} \in M_p(\mathbb{R}^2)$. \square

Nous pouvons généraliser ce résultat à \mathbb{R}^n pour $n \geq 2$ grâce au théorème suivant :

Théorème 6.2

Soit $m(\gamma, \nu) \in M_p(\mathbb{R}^{n+m})$, alors pour presque tout $\gamma \in \mathbb{R}^n$, la fonction m_γ définie par $m_\gamma(\nu) = m(\gamma, \nu)$ est dans $M_p(\mathbb{R}^m)$ et

$$\|m_\gamma\|_{M_p(\mathbb{R}^m)} \leq \|m\|_{M_p(\mathbb{R}^{n+m})}.$$

Remerciements

Je remercie le professeur J. Stubbe pour ses corrections et ses améliorations.

Je remercie aussi Rafael et Monica pour leurs aides et leurs corrections.

Je souhaite encore remercier particulièrement le professeur A. Derighetti pour ces longues explications sur le sujet (et beaucoup plus).

Références

- [Kra] S. G. Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis*, The Mathematical Association of America, 1999
- [Gra] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson, 2004